

Chapitre 3 : Régime transitoire

En physique, un **régime transitoire** est le régime d'évolution d'un système qui n'a pas encore atteint un état stable ou un régime établi (permanent ou périodique).

En électrocinétique, l'étude du régime transitoire est celle des phénomènes qui se produisent entre l'instant où un interrupteur est manœuvré pour appliquer (ou supprimer) une tension continue ou périodique à un montage et celui où le régime permanent est atteint.

Dans ce chapitre, on va étudier ce qui se passe entre deux régimes continus (c à d le régime transitoire), dans ce cas les grandeurs électriques ne sont plus constantes. Nous commençons tout d'abord par quelque rappel concernant le condensateur et l'inductance.

3) Rappels :

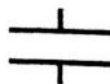
3-1-1) les condensateurs

Un condensateur est un réservoir temporaire d'énergie sous forme électrostatique. Il se compose de deux armatures métalliques et d'un isolant (ou diélectrique) placé entre ces armatures. Le métal des armatures conducteur ne peut pas stocker d'énergie, mais il peut stocker des charges électriques.

La quantité de charges électriques stockée sur une des deux armatures est l'opposé de la quantité stockée sur l'autre. La quantité de charge positive Q est proportionnelle à la tension U entre les armatures. Le coefficient de proportionnalité C entre la charge Q et tension U est la **capacité**:

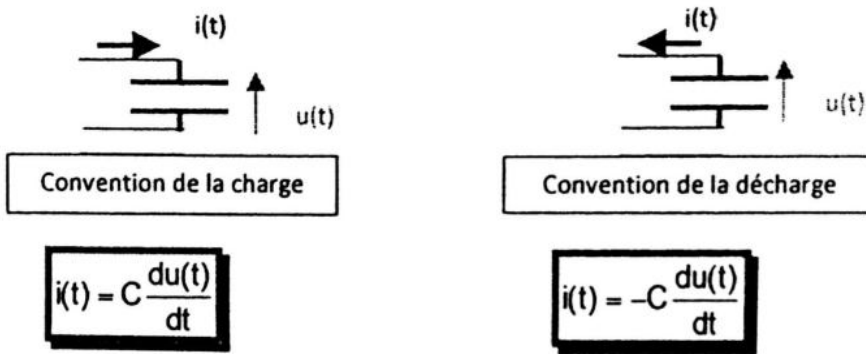
$$C = \frac{Q}{U}$$

Unité est farad (F) et symbole est :



Relation entre tension et intensité

Lorsque la tension aux bornes du condensateur varie, celui-ci est nécessairement dans un circuit électrique parcouru par un courant de charge ou de décharge. Il existe une relation entre la tension et le courant, qui traduit les propriétés électrocinétiques du composant condensateur. Il en existe deux, en fait, en raison de l'algébrisation des grandeurs électriques.



3-1-2) Inductance (Bobine)

Une bobine est constituée d'un enroulement de fil conducteur éventuellement autour d'un noyau.

Selon le théorème d'Ampère tout courant parcourant un circuit crée un champ magnétique à travers la section qu'il l'entoure. L'inductance L de ce dipôle est le quotient du flux Φ de ce champ magnétique par l'intensité du courant I traversant le circuit :

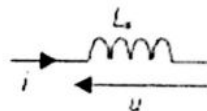
$$L = \frac{\Phi}{i}$$

L'unité est le Henri "H" et le symbole est :



Relation entre Intensité

On admet la relation suivante :



$$U = L \frac{di}{dt} = e(t)$$

où L est l'inductance propre du circuit ou composant, U est la tension aux bornes de la bobine, $\frac{di(t)}{dt}$ est la variation du courant qui traverse le circuit avec le temps (mesurée en ampères par seconde).

3-2) Systèmes transitoire du premier ordre

Les circuits étant linéaires, toute grandeur électrique $x(t)$ est d'écrite par une équation différentielle linéaire à coefficient constant.

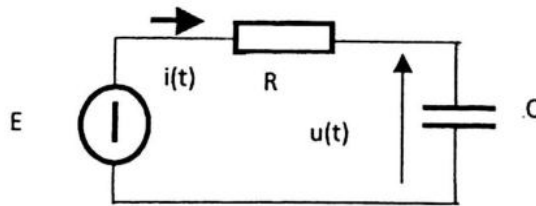
On détermine les constantes d'intégration grâce aux conditions initiales en utilisant :

- la continuité de la tension aux bornes du condensateur (si non $i=C.du/dt$ tendrait vers l'infini ce qui est physiquement impossible);
- la continuité de l'intensité du courant dans la bobine (si non $u=L.di/dt$ tendrait vers l'infini ce qui est physiquement impossible).

3-2-1) charge d'un condensateur

a) Evolution de la tension aux bornes de condensateur

Un condensateur de capacité C est chargé à travers une résistance R , par une source de tension parfaite de f.e.m. E .



Une charge Q fournie par le générateur est stockée par le condensateur. A la fin de la charge, la tension aux bornes de la capacité est E .

en appliquant la loi des mailles sur le circuit on aura

$$E = Ri + u$$

$$i = C \frac{du}{dt}$$

$$E = CR \frac{dU}{dt} + U$$

$$\boxed{\frac{dU}{dt} + \frac{U}{CR} = \frac{E}{CR}}$$

On pose $\tau=CR$ (constante de temps du système)

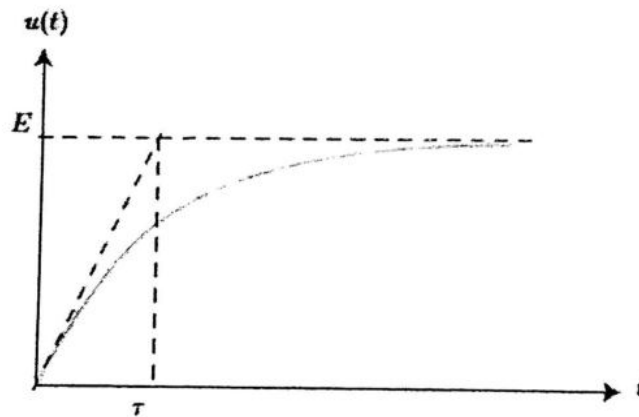
On a donc une équation différentielle régie par U .

Si à $t=0$ $U(t=0) = U_0$, La solution générale de cette équation est donnée par :

$$\boxed{U(t) = U_0 e^{-\frac{t}{\tau}} + E(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})}$$

Cas particulier : si $U_0 = 0$

$$\boxed{U(t) = E(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})}$$



b) Evolution de l'intensité de courant

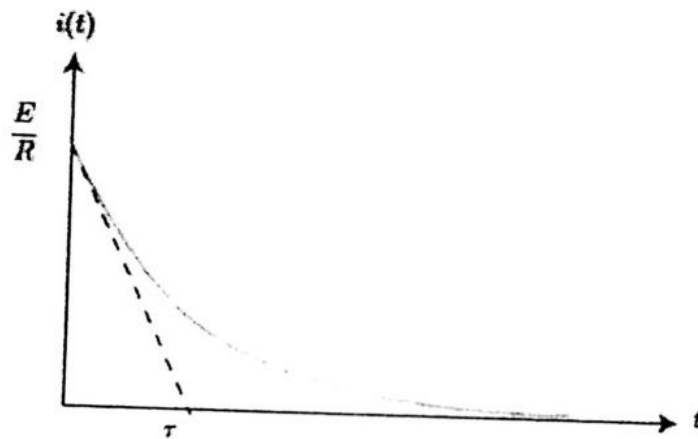
On a : $i = C \frac{dU}{dt}$

Donc :

$$i(t) = \left(\frac{-U_0}{R} + \frac{E}{R} \right) e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Cas particulier : si $U_0 = 0$

$$i(t) = \frac{E}{R} e^{-\frac{t}{\tau}}$$



c) Bilan énergétique

Pour Simplifier on choisit le cas particulier si $U_0 = 0$

$$W = \int_0^{\infty} i(t) \cdot E dt$$

On remplace $E = Ri + u(t)$ et on trouve après calcul :

$$W = \frac{1}{2} CE^2$$

L'énergie fournie par le générateur se répartit équitablement entre la résistance et le condensateur.

3-2-2) décharge d'un condensateur au travers d'une résistance :

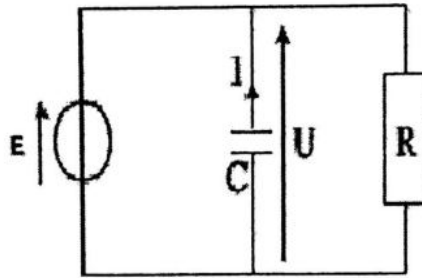
a) Variation de la tension :

Supposons le circuit suivant : Le condensateur est initialement chargé sous une tension E .

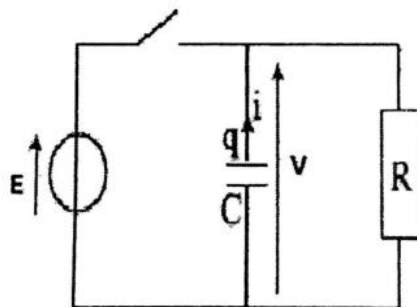
En régime continu, le condensateur se comporte comme un interrupteur ouvert :

$$U = E \quad \text{et} \quad I = 0 \quad \text{à travers le condensateur}$$

$$I' = E/R \quad \text{à travers la résistance.}$$



A $t=0$, on ouvre l'interrupteur, le condensateur se décharge dans la résistance :



La loi de maille nous permet d'écrire :

$$V = R \cdot i = R \cdot \frac{dq}{dt}$$

Aux bornes de condensateur on a :

$$i = -C \frac{dV}{dt}$$

Régime transitoire par Pr Zerfaoui

en remplaçant le courant i dans l'expression précédente on aura l'équation différentielle suivante

$$V = -RC \cdot \frac{dV}{dt}$$

$$\frac{dV}{dt} + \frac{1}{RC} V = 0$$

$$\boxed{\frac{dV}{dt} + \frac{1}{\tau} V = 0}$$

Avec $\tau = RC$ est appelé la constante du temps

La solution de cette équation est sous forme

$$\boxed{V(t) = cst e^{-\frac{t}{\tau}}}$$

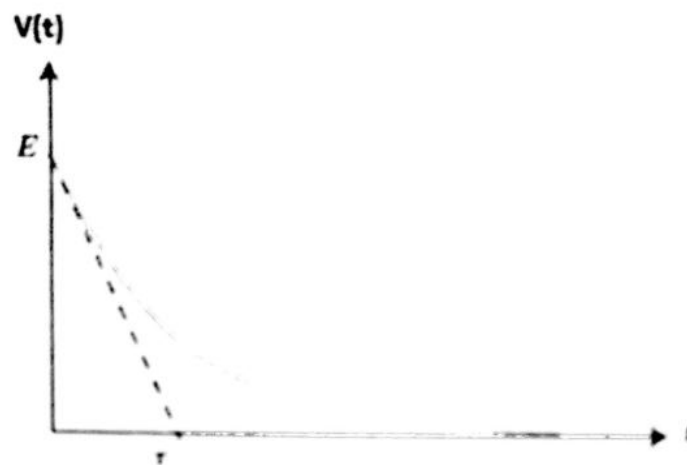
Les conditions aux limites:

à $t=0$ on a $V(t=0)=E$, donc $cst = E$

finalement

$$\boxed{V(t) = E e^{-\frac{t}{\tau}}}$$

Représentation graphique l'évolution de la tension aux bornes de condensateur.



b) Variation de l'intensité de courant :

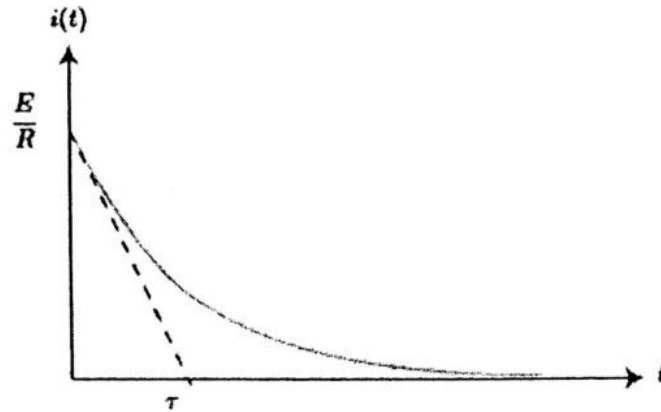
On sait que :

$$i = -C \frac{dV}{dt}$$

On remplaçons V par son expression on a donc

$$i(t) = \frac{EC}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} = \frac{E}{R} e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Représentation graphique l'évolution de courant aux bornes de condensateur.



C) Bilan énergétique

$$W = \int_0^{\infty} V(t) \cdot i(t) dt = \frac{E^2}{R} \int_0^{\infty} e^{-2\frac{t}{\tau}}$$

$$W = \frac{1}{2} CE^2$$

Cette énergie est l'énergie emmagasinée dans le condensateur

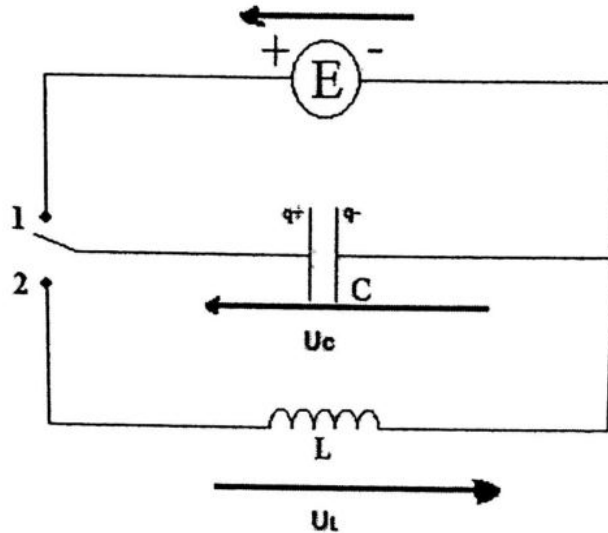
3-2) Systèmes transitoire du seconde ordre

3-2-2) décharge d'un condensateur au travers d'une bobine (régime libre):

a) Evolution de la tension du courant.

Suposons le circuit suivant : Le condensateur est initialement chargé sous une tension E . (interrupteur sur 1) et $U = E$ et $I = 0$ à travers le condensateur

$t = 0$ l'interrupteur sur 2 alors $U = E$ et $i \neq 0$



Pour le condensateur

$$q(t) = C \cdot U_c(t)$$

$$i(t) = \frac{dq}{dt} = C \cdot \frac{dU_c(t)}{dt}$$

- Pour la bobine :

$$U_L = L \frac{di}{dt} = -L \cdot C \cdot \frac{d^2 U_c}{dt^2}$$

• On utilise la loi des mailles, qui nous donne:

$$U_L = -U_c$$

• On aboutit aux équations suivantes :

$$LC \frac{d^2 U_c}{dt^2} + U_c = 0$$

$$\frac{d^2 U_c}{dt^2} + \frac{1}{LC} U_c = 0$$

On pose $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

soit :

$$\boxed{\frac{d^2 U_c}{dt^2} + \omega_0^2 U_c = 0}$$

On obtient une équation différentielle du 2^o ordre de la tension du condensateur.

Cette équation admet la solution sous forme :

$$\boxed{U_c = U_M \sin(\omega_0 t + \varphi)}$$

$$\text{A } t=0 \quad U_c = E = U_M$$

$$U_M = U_M \sin(\varphi)$$

$$1 = \sin(\varphi)$$

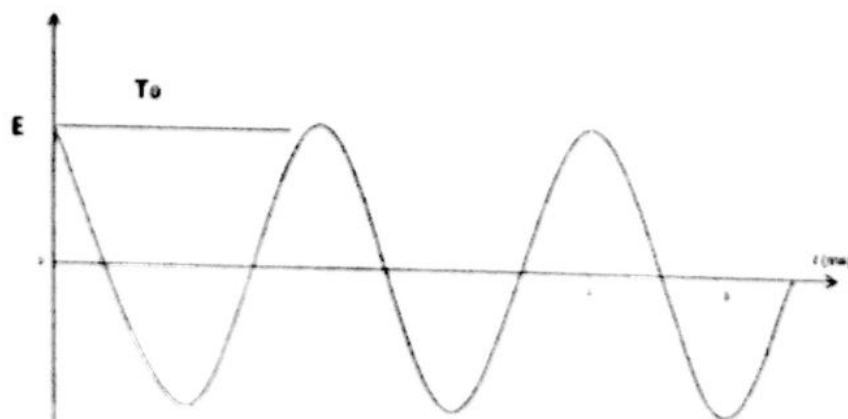
$$\varphi = \frac{\pi}{2}$$

$$\boxed{U_c = E \sin\left(\omega_0 t + \frac{\pi}{2}\right)}$$

ω_0 est la pulsation propre de circuit LC et sa période est donnée par : $T_0 = 2\pi\sqrt{LC}$

On dit période et pulsation *propres* car, une fois le système branché, plus aucun agent extérieur ne vient modifier, dissiper ou apporter de l'énergie au circuit

b) Présentation graphique :



Ce circuit électrique est un oscillateur non amorti. On peut obtenir les expressions de courant et de la charge en utilisant les relations qui relient ces deux grandeurs à la tension

c) Bilan énergétique :

Pour le condensateur $W_c = \frac{1}{2}CE^2$

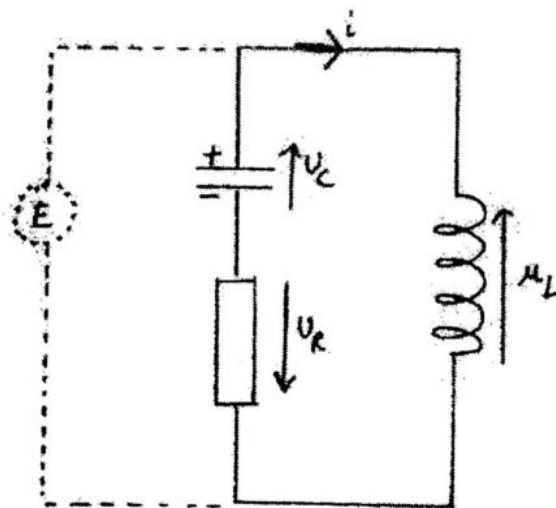
Pour la bobine $W_L = \frac{1}{2}Li_{max}^2$

$$W_c = W_L$$

Il y a transfert de l'énergie électrique du condensateur en énergie magnétique dans la bobine, et vice versa : l'énergie oscille du condensateur à la bobine tous les quarts de période

3-2-3 Oscillations libres amorties : circuit RLC

Supposons le circuit suivant déjà alimenté par le générateur de FEM, E. On suppose que la bobine a une résistance interne r



D'après la loi des mailles on a :

$$U_c = U_L + U_R$$

$$-\frac{q}{C} = L \frac{di}{dt} + ri + Ri$$

on tenant compte que $i = \frac{dq}{qt}$ on aura donc :

$$L \frac{d^2q}{dt^2} + (r + R) \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = 0$$

$$\boxed{\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{(r + R)}{L} \frac{dq}{dt} + \frac{q}{CL} = 0}$$

Le terme $\frac{(r+R)}{L} \frac{dq}{dt}$ est le terme d'amortissement

On pose :

$$w_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$\lambda = \frac{R+r}{2L}$$

$$Q = \frac{1}{(R+r)\sqrt{LC}}$$

L'équation devient :

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{w_0}{Q} \frac{dq}{dt} + w_0^2 q = 0$$

$$\boxed{\frac{d^2q}{dt^2} + 2\lambda \frac{dq}{dt} + w_0^2 q = 0}$$

A) Solution de l'équation différentielle :

La résolution de l'équation différentielle s'effectue en écrivant l'équation caractéristique :

$$\boxed{m^2 + \frac{w_0}{Q} m + w_0^2 = 0}$$

On calcule le Δ de cette équation :

$$\Delta = \left(\frac{w_0}{Q}\right)^2 - 4w_0^2 = 4\lambda^2 - 4w_0^2$$

La solution de l'équation dépend de signe de Δ .

Si $\Delta > 0$ soit $Q < 0,5$ (régime apériodique)

on aura deux solutions pour l'équation caractéristique :

$$m_1 = -\frac{w_0}{2q} + \sqrt{\Delta} = -\frac{w_0}{2q} + w_0 \sqrt{\left(\frac{1}{2Q}\right)^2 - 1}$$

$$m_2 = -\frac{w_0}{2q} - \sqrt{\Delta} = -\frac{w_0}{2q} - w_0 \sqrt{\left(\frac{1}{2Q}\right)^2 - 1}$$

La solution de l'équation différentielle est sous forme :

$$q(t) = Ae^{m_1 t} + Be^{m_2 t}$$

A et B sont déterminées avec les 2 conditions initiales données d'une part par la présence de la bobine, et d'autre part par la présence du condensateur : $i(t=0) = 0$ et $q(t=0) = q_0$.

$$q(t=0) = q_0 = A + B$$

$$i(t=0) = \frac{dq(t=0)}{dt} = A \cdot m_1 + B \cdot m_2$$

Ce système d'équation permet de déterminer les deux constantes A et B

$$A = -\frac{q_0 m_2}{m_1 - m_2}$$

$$B = \frac{q_0 m_1}{m_1 - m_2}$$

On peut déduire la tension et le courant en utilisant les équations :

$$u_c(t) = \frac{q}{C} = \frac{1}{C} (Ae^{m_1 t} + Be^{m_2 t})$$

Régime transitoire par Pr Zerfaoui

$$i(t) = C \frac{du_c(t)}{dt} = m_1 A e^{m_1 t} + m_2 B e^{m_2 t}$$

Si $\Delta = 0$ soit $Q = 0,5$ (régime critique)

La solution de l'équation caractéristique est réelle :

$$m = -\frac{w_0}{2Q} = -w_0$$

Et la solution générale dans ce cas s'écrit :

$$q(t) = (A + Bt)e^{mt}$$

A et B sont déterminées avec les 2 conditions initiales données d'une part par la présence de la bobine, et d'autre part par la présence du condensateur : $i(t=0) = 0$ et $q(t=0) = q_0$.

On trouve :

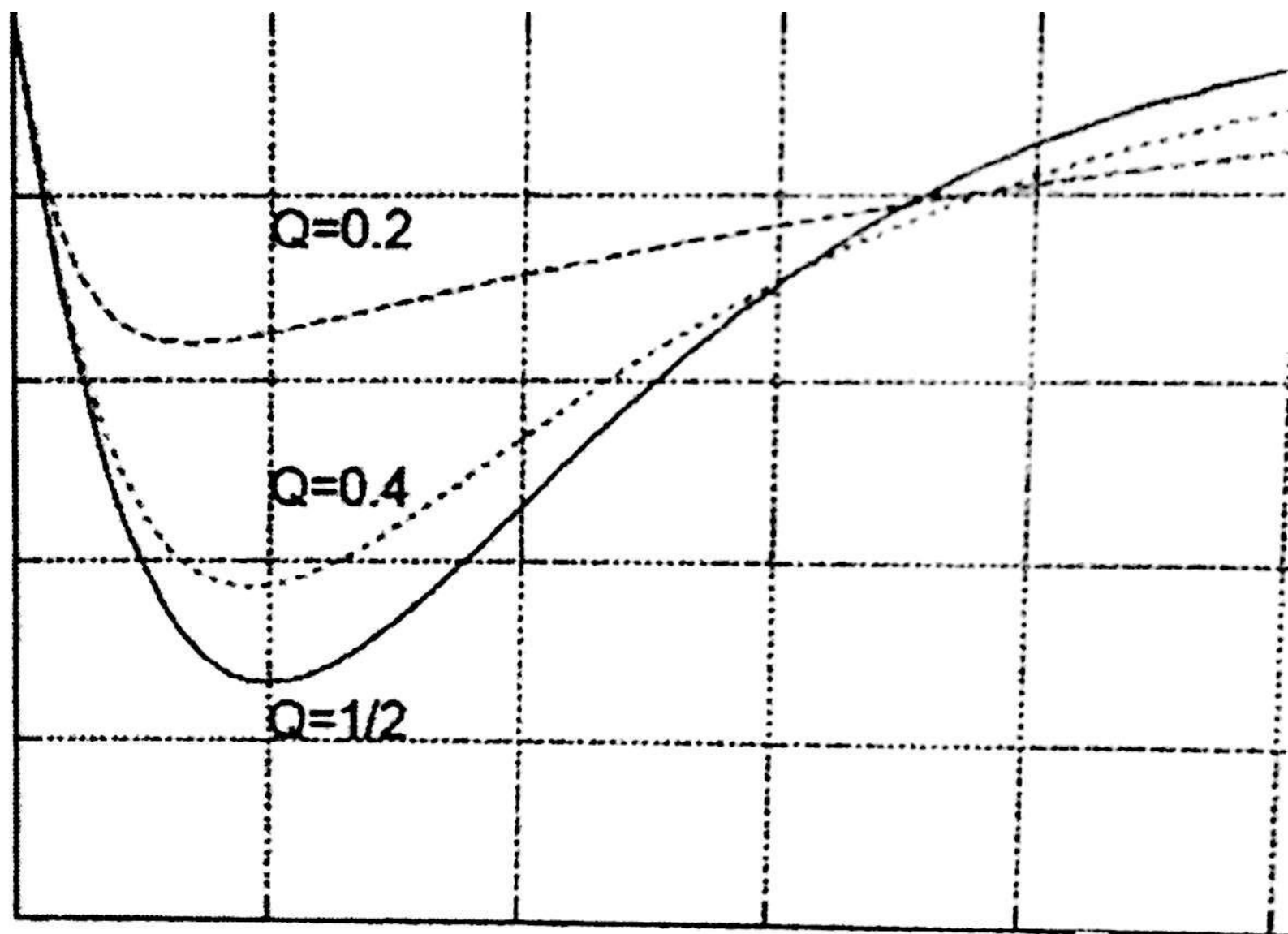
$$A = q_0$$

$$B = w_0 q_0$$

$$u_c(t) = \frac{q}{C} = \frac{1}{C} (q_0 + w_0 q_0 t) e^{-w_0 t}$$

$$i(t) = \frac{dq(t)}{dt} = -\frac{w_0^2 q_0 t e^{-w_0 t}}{C}$$

B) Représentation de l'évolution de la charge (la tension) en fonction du temps dans le cas de régime apériodique et critique ($Q < 0,5$ et $Q = 0,5$)



Régime transitoire par Pr Zerfaoui

La solution générale est alors :

$$q(t) = e^{-\frac{w_0 t}{2Q}} (A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t))$$

ou

$$q(t) = D \cdot e^{-\frac{w_0 t}{2Q}} (\cos(\omega t + \varphi))$$

Avec

$$\omega = w_0 \sqrt{1 - \left(\frac{1}{2Q}\right)^2}$$

A et B (ou D et φ) sont déterminées avec les 2 conditions initiales données par $i(t = 0) = 0$ et $q(t = 0) = q_0$:

On trouve :

$$A = q_0$$

$$\frac{dq}{dt}(t = 0) = 0 = B\omega - \frac{w_0}{2Q}A$$

$$A = q_0$$

$$B = \frac{q_0}{2Q \sqrt{1 - \left(\frac{1}{2Q}\right)^2}}$$

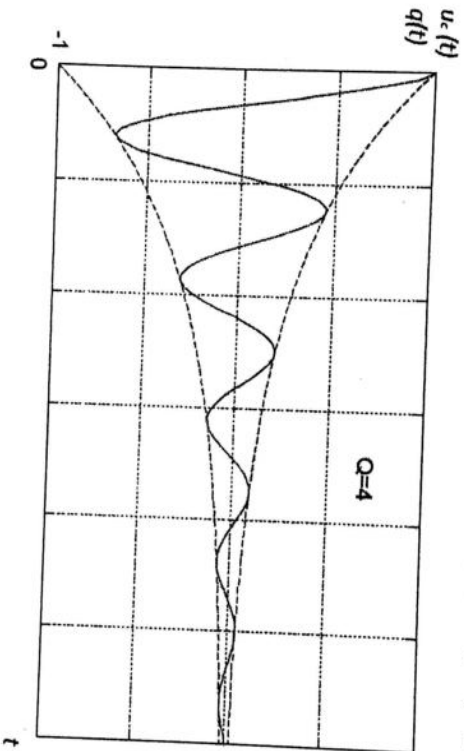
La tension aux bornes de condensateur est

$$u_c(t) = \frac{q}{C} = \frac{q_0}{C} e^{-\frac{w_0 t}{2Q}} \left(\cos(\omega t) + \frac{1}{2Q \sqrt{1 - \left(\frac{1}{2Q}\right)^2}} \sin(\omega t) \right)$$

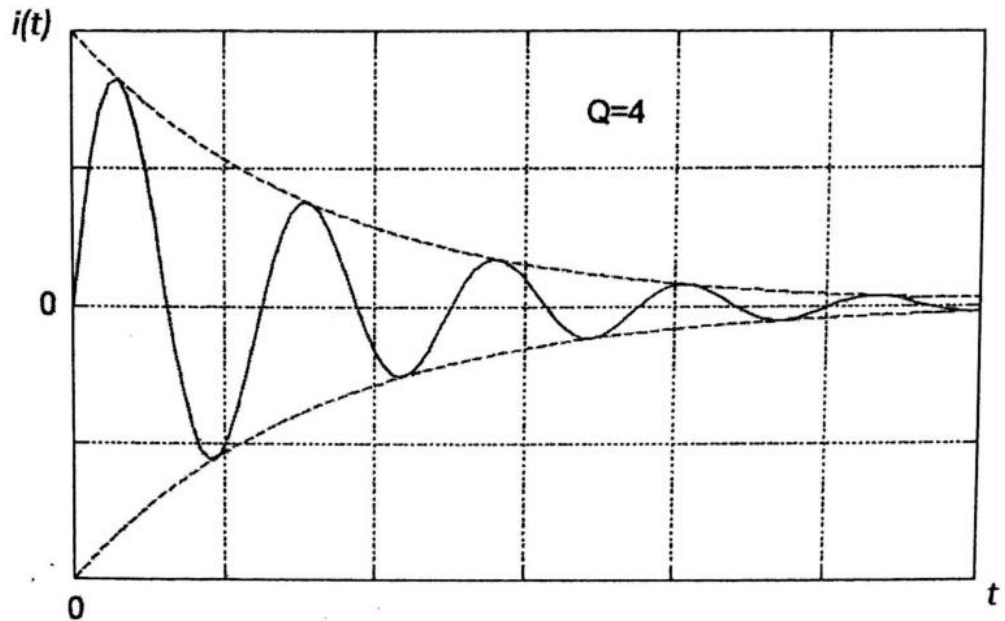
Le courant est :

$$i(t) = \frac{du_c(t)}{C} = -\frac{q_0 \omega_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{\omega}{2Q}\right)^2}} e^{-\frac{\omega_0 t}{2Q}} \cdot \sin(\omega t)$$

E) Représentation de l'évolution de la charge (ou la tension) en fonction du temps dans le cas régime pseudopériodique ($\Delta < 0$, soit $Q > 0,5$). (exemple $Q=4$)



F) Représentation de l'évolution de courant en fonction du temps dans le cas régime pseudopériodique ($\Delta < 0$, soit $Q > 0,5$). (exemple $Q=4$)



G) Bilan énergétique

On suppose que la résistance $r=0$. L'équation du circuit (loi des mailles) est multipliée par le courant i :

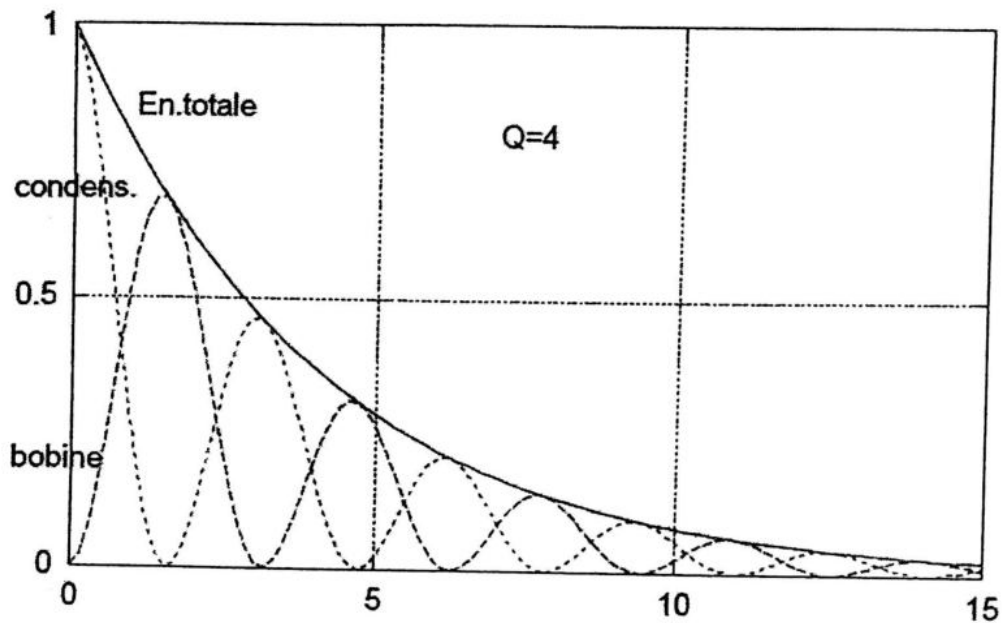
$$i \left(L \frac{di}{dt} + Ri + u_C \right) = 0$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} Li^2 \right) + \frac{q}{C} \frac{dq}{dt} = -Ri^2,$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} Li^2 + \frac{1}{2} \frac{q^2}{C} \right) = -Ri^2.$$

Cette équation s'interprète de la manière suivante : l'énergie totale ($\frac{1}{2} Li^2 + \frac{1}{2} CEu_c^2$) perdue par le circuit par unité de temps (stockée dans la bobine + le condensateur) est égale à la puissance dissipée par la résistance Ri^2 (sous forme de chaleur par effet Joule).

k) Représentation de l'évolution de l'énergie en fonction du temps (Q=4)



On peut déduire la tension et le courant en utilisant les équations :

$$u_c(t) = \frac{q}{C} = \frac{1}{C} (Ae^{m_1 t} + Be^{m_2 t})$$

$$i(t) = C \frac{du_c(t)}{dt} = m_1 A e^{m_1 t} + m_2 B e^{m_2 t}$$